JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 33, 35–42 (1971)

Charakterisierung einer Ordnung von konischen Maßen durch positive L^1-Kontraktionen

HERMANN ROST

Mathematisches Seminar der Johann Wolfgang Goethe-Universität, Robert-Mayer-Strasse 10, 6 Frankfurt am Main

Submitted by G.-C. Rota

EINLEITUNG UND ÜBERBLICK

V. Straßen hat in [1] die weiten Anwendungsmöglichkeiten eines Zerlegungssatzes dargestellt, welcher im wesentlichen besagt, daß eine Linearform, die unter einem gegebenen Integral subadditiver Funktionale liegt, selbst als Integral von Linearformen unter diesen Funktionalen dargestellt werden kann. In besonders intuitiver Weise wird dort der allgemeine Satz auf die Martingaltheorie und auf den Satz von Blackwell-Sherman-Stein-Cartier angewandt. Dieses Prinzip bietet sich jetzt auch der Ergodentheorie an, nachdem man hier Ungleichungen als wichtig erkannt hat, die den dort grundlegenden Ordnungsbeziehungen ähnlich sind :

Wenn $(\Omega, \mathscr{F}, p)$ und $(\Omega', \mathscr{F}', p')$ Maßräume sind und T eine positive lineare Abbildung mit Norm höchstens 1 von $L^1(\Omega, \mathscr{F}, p)$ in $L^1(\Omega', \mathscr{F}', p')$, so gilt für jedes n-Tupel $X_1, \dots, X_n$ von Funktionen aus $L^1(\Omega, \mathscr{F}, p)$ und jede positive positiv-homogene Funktion f in R^n

$$\int f(X_1, \dots, X_n)\, dp \geqslant \int f(TX_1, \dots, TX_n)\, dp'.$$

Für festes $X_1, \dots, X_n$ bildet die Zuordnung $f \mapsto \int f(X_1, \dots, X_n)\, dp$ eine positive Linearform auf dem Vektorraum der positiv-homogenen (stetigen) Funktionen im R^n, ein sogenanntes "konisches Maß". Das hier vorliegende Problem ist nun das folgende : wenn zwei konische Maße μ, ν gegeben sind mit $\mu(f) \leqslant \nu(f)$ für positives konvexes f, gibt es dann in einem geeigneten $L^1(\Omega, \mathscr{F}, p)$ Funktionen $X_1, \dots, X_n$ und eine positive lineare Abbildung T der Norm höchstens 1 in einen Raum $L^1(\Omega', \mathscr{F}', p')$ derart daß

$$\nu(f) = \int f(X_1, \dots, X_n)\, dp$$

$$\mu(f) = \int f(TX_1, \dots, TX_n)\, dp' \,?$$

In Satz 4 wird diese Frage beantwortet, indem eine solche kontrahierende Abbildung angegeben wird. Als Hilfsmittel dient eine Aussage (Satz 3) über die Desintegration von Maßen, die ein "konisches" Analogon zum Satz von Blackwell-Sherman-Stein-Cartier darstellt: Wenn $\mu(f) \leqslant \nu(f)$ für positives konvexes f, so gibt es ein konisches Maß ρ und eine meßbare Familie $(P_x)_{x \in R^n}$ konischer Maße mit

$$\nu(f) = \rho(f) + \mu(P.(f)), \qquad f \text{ stetig}$$

$$P_x(f) \geqslant f(x), \qquad x \in R^n, \qquad f \text{ positiv und konvex.}$$

Beim Beweis von Satz 3 wird eine Version des Satzes von Hahn-Banach benutzt, die die Fortsetzung einer Linearform unter einer subadditiven Funktion, die den Wert $+\infty$ annehmen kann, zum Inhalt hat. Wesentlich hierbei ist eine zusätzliche Ordnungsstruktur des Vektorraums. (Ausführliche Betrachtungen zu diesem Thema finden sich in [2].) Die Beweise zu Satz 3 und 4 werden so geführt, daß sie unabhängig von der endlichen Dimension des Grundraums, auf dem die positivhomogenen Funktionen definiert sind, gültig bleiben.

1. Konische Masze

Für $n = 1, 2, \ldots$ oder $n = \infty$ werde mit $\mathscr{B}^n(\mathscr{B}_+^n)$ das System der (positiven) positiv-homogenen Baireschen Funktionen in R^n bezeichnet; hierbei sei R^∞ die Menge der Folgen $(x_1, x_2, \ldots)$ mit $x_i \in R$. (Eine Funktion f heißt positiv-homogen, wenn $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$ für $\alpha \geqslant 0$.) Die i-te Koordinatenfunktion, die der Folge $x = (x_1, x_2, \ldots)$ die Zahl x_i zuordnet, werde mit X_i bezeichnet.

Definition 1. Für $n < \infty$ heißt eine Abbildung μ von $\mathscr{B}_+^n$ nach $[0, \infty]$ *n-dimensionales konisches Maß*, wenn

(a) $\mu(\alpha f) = \alpha\mu(f), \qquad \alpha \geqslant 0, \qquad f \in \mathscr{B}_+^n;$

(b) $\mu(f + g) = \mu(f) + \mu(g), \qquad f, g \in \mathscr{B}_+^n;$

(c) $\mu(f_n) \nearrow \mu(f)$ für $f_n \nearrow f$;

(d) $\mu(| X_i |) < \infty, \qquad i = 1, 2, \ldots .$

Bemerkung. Seien zum konischen Maß μ die reellen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \cdots > 0$ so gewählt, daß $\Sigma\alpha_i\mu(| X_i |) = 1$. Dann ist jede Bairesche Funktion in $\{x : \Sigma\alpha_i \cdot | x_i | = 1\}$ zu identifizieren mit ihrer positivhomogenen Fortsetzung und μ entspricht einem Maß m der Masse 1, das in $\{\Sigma\alpha_i \cdot | x_i | = 1\}$ konzentriert ist; d.h. zu jedem n-dim. konischen Maß μ gibt es ein gewöhnliches (sogar endliches) Maß m auf den Borelmengen von R^n mit

$$\int f\,dm = \mu(f) \qquad \text{für} \qquad f \in \mathscr{B}_+{}^n.$$

Es gilt eine zum Satz von Kolmogoroff analoge Aussage :

Satz 1. *Sei zu $n = 1, 2,\ldots$ μ_n ein n-dimensionales konisches Maß; für jedes Paar natürlicher Zahlen m, n mit $m < n$ gelte*

$$\mu_m(f) = \mu_n(f), \qquad f \in \mathscr{B}_+{}^m.$$

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes unendlich-dimensionales konisches Maß μ mit

$$\mu_m(f) = \mu(f), \qquad f \in \mathscr{B}_+{}^m, \quad m = 1, 2,\ldots .$$

(*Hierbei ist für $m < n \leqslant \infty$ der Kegel $\mathscr{B}_+{}^m$ in $\mathscr{B}_+{}^n$ eingebettet, indem man setzt $f(x_1, \ldots, x_n) : = f(x_1, \ldots, x_m)$ für $f \in \mathscr{B}_+{}^m$.*)

Beweisskizze. Man betrachtet in R^∞ zu $i = 1, 2,\ldots$ die Menge

$$\Omega_i : = \{x : x_1 = 0,\ldots, x_{i-1} = 0, \mid x_i \mid = 1\}$$

und rechnet nach, daß durch die μ_n mit $n \geqslant i$ eine Folge von in Ω_i konzentrierten verträglichen Maßen auf aufsteigenden σ-Algebren definiert wird. Sei m_i das durch diese Folge bestimmte Maß auf den Borelschen Mengen von R^∞. Dann kann μ als Integral von $\sum_{i=1}^\infty m_i$ auf den Funktionen aus $\mathscr{B}_+{}^\infty$ gewählt werden.

Folgende Kegel (bzw. Vektorräume) von positiv-homogenen Funktionen werden im weiteren Verlauf betrachtet : für $n < \infty$ seien mit $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}_+{}^n$, $\mathscr{K}^n$, $\mathscr{K}_+{}^n$ die stetigen, positiven stetigen, stetigen konvexen, positiven stetigen konvexen Funktionen bezeichnet. $\mathscr{C}^\infty$ (und analog $\mathscr{K}^\infty$, usw.) sei die Menge der in R^∞ definierten stetigen (konvexen, usw.) Funktionen, die nur von endlich vielen Koordinaten abhängen. Der Kegel der n-dimensionalen konischen Maße möge für $n \leqslant \infty$ mit der von $\mathscr{C}^n$ erzeugten schwachen Topologie versehen werden.

Es werden nun zwei Ordnungen für konische Maße in Analogie zur Bishop-de Leeuw-Ordnung eingeführt.

Definition 2. μ, ν n-dim. konische Maße ($n \leqslant \infty$). Dann bedeute

$$\mu \prec \nu \quad \text{soviel wie} \quad \mu(f) \leqslant \nu(f), \qquad f \in \mathscr{K}_+^n,$$
$$\mu \lll \nu \quad \text{soviel wie} \quad \mu(f) \leqslant \nu(f), \qquad f \in \mathscr{K}^n.$$

Offensichtlich gilt $\mu \ll \nu$ genau dann, wenn $\mu \prec \nu$ und $\mu(X_i) = \nu(X_i)$, $i = 1, 2, \ldots$. Eine Umkehrung dieser Beziehung gibt der

SATZ 2. *Seien μ, ν n-dim. konische Maße ($n \leqslant \infty$); dann ist $\mu \prec \nu$ gleichbedeutend mit $\nu = \nu_1 + \nu_2$, wobei ν_1, ν_2 konische Maße sind mit $\mu \ll \nu_1$, ν_2 beliebig.*

Im Beweis wird das folgende Lemma verwendet, das ein Analogon zu Prop. 3.1 in [3] darstellt und wesentlich in allen ähnlichen Auffächerungssätzen (siehe auch Beweis von Th. 8 in [1]) benötigt wird:

LEMMA 1. *Sei $f \in \mathscr{C}_+^n$ ($n \leqslant \infty$) und sei $\check{f}$ die größte konvexe Unterfunktion von f; μ n-dim. konisches Maß. Dann gilt*

$$\mu(\check{f}) \geqslant \inf_{\nu \gg \mu} \nu(f) \geqslant \inf_{\nu \succ \mu} \nu(f).$$

(*Die umgekehrte Abschätzung $\mu(\check{f}) \leqslant \inf_{\nu \succ \mu} \nu(f)$ ist offensichtlich gültig.*)

Beweis. Zu zeigen ist nur die linke Ungleichung. Weiter ist die Behauptung nur für $n < \infty$ zu beweisen, da auch im Fall $n = \infty$ die Funktionen f und $\check{f}$ nur von endlich vielen Koordinaten abhängen.

Die Funktion $\bar{f}$ definiert durch

$$\bar{f}(x) = \inf_{\nu \gg \delta_x} \nu(f) \qquad (\delta_x : \text{Zuordnung } f \mapsto f(x))$$

ist positiv, konvex und von f majorisiert. Daher gilt $\bar{f} \leqslant \check{f}$. Sei nun $\mu = \sum \delta_{x_i}$; man hat dann

$$\inf_{\nu \gg \mu} \nu(f) \leqslant \sum \inf_{\nu_i \gg \delta_{x_i}} \nu_i(f) = \sum \bar{f}(x_i) = \mu(\bar{f}) \leqslant \mu(\check{f}).$$

Ein beliebiges μ wird durch ein diskretes μ' mit $\mu' \gg \mu$ schwach approximiert, so daß die Ungleichung

$$\inf_{\nu \gg \mu} \nu(f) \leqslant \inf_{\nu \gg \mu'} \nu(f) \leqslant \mu'(\check{f}) \leqslant \mu(\check{f}) + \epsilon$$

gilt. Damit ist das Lemma bewiesen.

Beweis von Satz 2. Sei $\nu \succ \mu$ und sei $M = \{\nu_1 + \nu_2 : \nu_1 \gg \mu\}$; dann ist M schwach abgeschlossen und konvex. Wäre nun $\nu \notin M$, gäbe es ein $f \in \mathscr{C}^n$ und ein $c \in R$ mit

$$\nu(f) < c; \quad \rho(f) \geqslant c \qquad \text{für} \qquad \rho \in M.$$

Aus der zweiten Ungleichung folgt $f \geqslant 0$; nach dem Lemma aber ist

$$\mu(f) \geqslant \inf_{\nu_1 \gg \mu} \nu_1(f) \geqslant c > \nu(f) \geqslant \nu(\check{f})$$

im Widerspruch zu $\mu \prec \nu$. In der anderen Richtung ist nichts zu beweisen.

Definition 3. Als *konischer Übergangskern* von R^n in sich ($n \leqslant \infty$) werde verstanden eine Familie $(P_x)_{x \in R^n}$ n-dimensionaler konischer Maße mit der Eigenschaft, daß für $f \in \mathscr{C}_+{}^n$ die Zuordnung $x \mapsto P_x(f)$ in $\mathscr{B}_+{}^n$ liegt. Diese Funktion wird mit Pf bezeichnet.

Es gilt dann der Auffächerungssatz für konische Maße :

Satz 3. *Seien μ, ν n-dimensionale konische Maße ($n \leqslant \infty$) mit $\mu \prec \nu$ (bzw. $\mu \lessdot \nu$). Dann gibt es einen konischen Übergangskern P und ein konisches Maß ρ mit*

(a) $\nu(f) = \mu(Pf) + \rho(f), \qquad f \in \mathscr{C}^n.$

(b) $\delta_x \prec P_x$ (*bzw.* $\delta_x \lessdot P_x$), $\qquad x \in R^n.$

Beweis (für die Ordnung "$\lessdot$"; die Behauptung für die andere Ordnung folgt dann sofort mit Hilfe von Satz 2). Sei in $R^n \setminus \{0\}$ mit $\mathscr{A}$ die σ-Algebra der nullhomogenen Borelschen Mengen bezeichnet. (A heißt nullhomogen, wenn $x \in A$ impliziert $\lambda x \in A$ für $\lambda > 0$.) Sei $\bar{\mathscr{A}}$ der Vektorraum der $\mathscr{A}$-meßbaren reellen Treppenfunktionen mit endlichem Wertebereich. Sei $\bar{\mathscr{C}}^n$ das Tensorprodukt $\bar{\mathscr{A}} \otimes \mathscr{C}^n$; dann kann ein Element $F \in \bar{\mathscr{C}}^n$ auf die Gestalt $F = \sum 1_{A_i} \otimes f_i$ mit disjunkten A_i gebracht werden und aufgefaßt werden als (eindeutig bestimmte) Abbildung von $R^n \setminus \{0\}$ nach $\mathscr{C}^n$, die in den Punkten von A_i den Wert f_i annimmmt. Es wird $\mathscr{C}^n$ in $\bar{\mathscr{C}}^n$ eingebettet, indem man f mit $1 \otimes f$ identifiziert. Man definiert in $\bar{\mathscr{C}}^n$ die Funktion $\check{\mu}$, und zwar für das Argument $F = \sum 1_{A_i} \otimes f_i$ mit paarweise disjunkten A_i durch

$$\check{\mu}(F) = \sum_i \mu(1_{A_i} \cdot \hat{f}_i).$$

(Hierin ist $\hat{f} = -(-f)\check{}$ die kleinste konkave Majorante von f, bzw. $+\infty$ wenn es keine solche Majorante gibt.) Offensichtlich ist $\check{\mu}$ auf diese Weise eindeutig definiert und subadditiv in $\bar{\mathscr{C}}^n$.

Weiter ist die im Unterraum $\mathscr{C}^n$ erklärte Linearform ν dort durch $\check{\mu}$ majorisiert :

$$\nu(f) \leqslant \nu(\hat{f}) \leqslant \mu(\hat{f}) = \check{\mu}(f) \qquad \text{wegen} \qquad \mu \prec \nu.$$

Um ν unter $\check{\mu}$ auf ganz $\bar{\mathscr{C}}^n$ fortsetzen zu können, benötigt man die folgende Version des Satzes von Hahn-Banach (Beispiel 5.4. in [2]) : "Sei $(E, \prec)$

geordneter Vektorraum, der von seinen positiven Elementen erzeugt wird; sei q subadditiv in E, $-\infty < q(x) \leqslant +\infty$ für $x \in E$, $q(x) < \infty$ für $x < 0$.

Sei F ein Teilvektorraum von E, derart daß zu $x \in E$ Elemente $y_1, y_2 \in F$ existieren mit $y_1 < x < y_2$. Dann gibt es zu jeder in F definierten und von q majorisierten Linearform eine Fortsetzung unterhalb q auf E."

Man ordnet $\bar{\mathscr{C}}^n$, wenn man setzt : $1_{A_i} \otimes f_i < 0$ genau dann, wenn alle $f_i \leqslant 0$; der zitierte Satz ist dann anwendbar und ν zu einer Linearform Q mit $Q \leqslant \check{\mu}$ auf $\bar{\mathscr{C}}^n$ fortsetzbar.

Für jedes $f \in \mathscr{C}^n$ ist nun $Q(1_A \otimes f)$ in Abhängigkeit von A eine endlich-additive Mengenfunktion, die mit Q_f bezeichnet werde. Man betrachtet zu einer strikt positiven Funktion $f^* \in \mathscr{B}_+{}^n$ mit $\mu(f^*) < \infty$ das Maß m^* in $\mathscr{A}$, erklärt als

$$m^*(A) = \mu(1_A \cdot f^*).$$

Von Q_f nimmt man den σ-additiven Anteil und davon den m^*-totalstetigen Anteil. Sein Wert an der Stelle A werde mit $\mu(1_A \cdot \tilde{f})$ bezeichnet, wobei $\tilde{f}$ eine bis auf eine m^*-Nullmenge eindeutig bestimmte positiv-homogene Funktion ist. Da die Bildung des σ-additiven und des m^*-totalstetigen Anteils eine lineare Operation ist und da $Q_{f+g} = Q_f + Q_g$, gilt für $f, g \in \mathscr{C}^n$, $\alpha \in R$:

$$\widetilde{(f+g)} = \tilde{f} + \tilde{g}$$
$$\widetilde{(\alpha f)} = \alpha\tilde{f}.$$

Es gilt für $f \in \mathscr{C}^n$ nach Konstruktion von Q

$$Q_f(A) \geqslant -\check{\mu}(1_A \otimes (-f)) = \mu(1_A \cdot \check{f}),$$

insbesondere für positives f and $A \in \mathscr{A}$

$$0 \leqslant Q_f(A) \qquad \text{und} \qquad Q_f(A) \leqslant Q(1 \otimes f) = \nu(f) < \infty.$$

Aus diesen Abschätzungen gewinnt man

$$\tilde{f} \geqslant \check{f} \qquad m^*\text{-fast überall}, \qquad f \in \mathscr{C}^n;$$

$\mu(\tilde{f}) \leqslant \nu(f) < \infty$ und daher $0 \leqslant \tilde{f} < \infty$ m^*-fast überall, $f \in \mathscr{C}_+{}^n$. Man löst nun das Lifting-Problem, eine Version Pf von $\tilde{f}$ in $\mathscr{B}^n$ zu finden, derart, daß für alle $x \in R^n$ gilt :

(a) $0 \leqslant Pf(x) < \infty$, für $f \in \mathscr{C}_+{}^n$;

(b) $P(f+g)(x) = Pf(x) + Pg(x)$, $f, g \in \mathscr{C}^n$;

(c) $P(\alpha f)(x) = \alpha Pf(x)$, $f \in \mathscr{C}^n$, $\alpha \in R$;

(d) $Pf(x) \geqslant \check{f}(x)$, für $f \in \mathscr{C}^n$.

Die Zuordnung $f \mapsto Pf(x)$ ist als monotone Linearform in $\mathscr{C}^n$ nach der Theorie der Radonmaße für jedes x zu einem konischen Maß P_x fortsetzbar. (Im Fall $n = \infty$ wird hierfür noch Satz 1 benötigt.) Es gilt dann für $f \in \mathscr{K}^n$, $x \in R^n$:

$$P_x(f) = Pf(x) \geqslant \check{f}(x) = f(x),$$

d.h. $P_x \gg \delta_x$ für $x \in R^n$.

Wegen $\mu(\tilde{f}) \leqslant \nu(f)$ für $f \in \mathscr{C}_+{}^n$ gibt es eine Darstellung

$$\nu(f) = \mu(Pf) + \rho(f), \qquad f \in \mathscr{C}^n,$$

wo ρ eine positive Linearform in $\mathscr{C}^n$, also ein konisches Maß ist. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Wir kommen nun zur eingangs erwähnten Charakterisierung der Ordnung von Maßen durch positive L^1-Abbildungen. Zum Sprachgebrauch eine Bemerkung : wenn $m_1, \dots, m_n$ bezüglich eines festen Maßes p totalstetige signierte Maße endlicher Variation auf einer σ-Algebra $\mathscr{G}$ sind und $X_i = dm_i/dp$, $i = 1, 2, \dots$, so heiße das n-dimensionale konische Maß $f \mapsto \int f(X_1, \dots, X_n)\, dp$ die *gemeinsame konische Verteilung* von $m_1, \dots, m_n$. Diese Verteilung ist unabhängig von p. Wenn $\mathscr{F}$ eine σ-Unteralgebra von $\mathscr{G}$ ist, so stellt die Einschränkung der p-totalstetigen signierten Maße endlicher Variation auf den Definitionsbereich $\mathscr{F}$ eine positive Abbildung der Norm 1 von $L^1(\mathscr{G}, p)$ nach $L^1(\mathscr{F}, p)$ dar. In diesem Sinn beantwortet nun Satz 4 die Frage nach der Existenz einer geeigneten L^1-Abbildung zu zwei vorgegebenen konische Maßen.

SATZ 4. *Seien μ, ν n-dimensionale konische Maße ($n \leqslant \infty$) mit $\mu \ll \nu$. Dann gibt es auf einer Menge Ω zwei Algebren $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ mit $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$, sowie n signierte Maße $m_1, m_2, \dots$ auf $(\Omega, \mathscr{G})$, deren gemeinsame konische Verteilung ν ist und deren Einschränkung auf $(\Omega, \mathscr{F})$ nach μ verteilt ist.*

Beweis. Nach Satz 3 gibt es einen konischen Übergangskern $(P_x)_{x \in R^n}$ und ein konisches Maß ρ mit

$$\nu(f) = \mu(Pf) + \rho(f), \qquad f \in \mathscr{C}^n$$
$$P_x \gg \delta_x, \qquad x \in R^n.$$

Man wählt nun einen gewöhnlichen Übergangskern $(T_x)_{x \in R^n}$ von R^n in sich, der

$$T_x(f) = P_x(f), \qquad f \in \mathscr{C}^n; \quad T_x(1) = 1$$

für $x \neq 0$ erfüllt.

Sei jetzt $\Omega = R^n \times R^n$, $\mathscr{G}$ die Borelalgebra in Ω und $X = (X_1, X_2, \ldots)$ bzw. $Y = (Y_1, Y_2, \ldots)$ der erste bzw. zweite Satz von Koordinatenvariablen. In $(\Omega, \mathscr{G})$ existiert ein endliches Maß q mit den Eigenschaften

(a) μ ist gemeinsame konische Verteilung von $X_1 \cdot q$, $X_2 \cdot q, \ldots$;

(b) Y ist unter der Bedingung $X = x$ nach T_x verteilt; $x \neq 0$;

(c) ρ ist die konische Verteilung von $Y_1 \cdot q$, $Y_2 \cdot q, \ldots$ in $\{X = 0\}$.

Dann ist aber ν die gemeinsame konische Verteilung von $Y_1 \cdot q$, $Y_2 \cdot q, \ldots$ in $(\Omega, \mathscr{G})$. Wenn $\mathscr{F}$ die von X erzeugte σ-Algebra in Ω bezeichnet, so ist nach (b) und (c) $\mathscr{E}^{\mathscr{F}} Y = X$ (man beachte, daß $\rho(X_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$). Nach (a) besitzt somit $Y_1 \cdot q$, $Y_2 \cdot q, \ldots$ in $\mathscr{F}$ die konische Verteilung μ.

Eine Modifikation dieses Satzes für die "$\prec$"-Ordnung folgt jetzt sofort mit Hilfe von Satz 2:

Satz 4a. *Seien μ, ν n-dimensionale konische Maße ($n \leqslant \infty$) mit $\mu \prec \nu$. Dann gibt es auf einer geeigneten Menge Ω eine σ-Algebra $\mathscr{G}$, auf einer Teilmenge $\Omega' \in \mathscr{G}$ von Ω eine σ-Algebra $\mathscr{F}$ mit $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$, sowie n signierte Maße $m_1, m_2, \ldots$ auf $(\Omega, \mathscr{G})$ mit konischer Verteilung ν, deren Einschränkung auf $(\Omega', \mathscr{F})$ nach μ verteilt ist.*

Literatur

1. V. Strassen, On the existence of probability measures with given marginals, *Ann. Math. Statist.* **36** (1965), 423–439.
2. H. Dinges, Decomposition in ordered semigroups, *J. Functional Anal.* (1970), **5**, 436–483.
3. R. R. Phelps, "Lectures on Choquets Theorem," Van Nostrand, Princeton, N. J., 1966.